НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 6

4 МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

4.1 Метод фазовой плоскости

Как мы выяснили, рассмотрение процессов на фазовой плоскости, то есть исследование фазового портрета, позволяет решить задачу анализа нелинейных систем второго порядка. То есть это позволяет судить об устойчивости и характере переходных процессов в системе. Этот метод анализа так и называется: метод фазовой плоскости. Значительная часть объектов управления могут быть аппроксимированы (приближенно представлены) дифференциальными уравнениями второго порядка, поэтому метод фазовой плоскости достаточно широко используется.

Метод фазовой плоскости относится к точным методам. Его преимущества: точность и наглядность представления переходных процессов. Недостаток – может применяться только для систем второго порядка.

Метод заключается в построении и исследовании фазового портрета динамической системы. Конечно, для этого нужно обладать некоторым опытом и навыками.

В общем случае задача нахождения уравнений фазовых траекторий в аналитической форме представляет значительные трудности. Ситуация упрощается для систем, фазовые траектории которых можно разделить на участки, каждый из которых найти проще, чем всю траекторию. Например, если каждый участок соответствует линейной системе с постоянными параметрами, но на разных участках эти параметры разные. К ним относятся системы, имеющие линейную динамическую часть и релейный элемент. Такие системы называются релейными системами. К релейным относятся также системы, имеющие в динамической части гладкие нелинейности.

Итак: *релейными называются системы регулирования, содержащие релейный элемент*. К релейным элементам относятся нелинейные элементы, характеристики которых содержат разрывы первого рода, то есть ступенчатое изменение. Это звенья г, д, е, ж в п.3.2 Лекции 5 и некоторые другие.

Для построения фазовых траекторий релейных систем как раз используется рассмотренное выше обстоятельство, а именно то, что получение траекторий по участкам проще, чем изучение поведения системы в целом. Этот прием называется методом припасовывания.

4.1.1 Метод припасовывания.

Метод припасовывания заключается в замене исходной фазовой траектории системы совокупностью более простых фазовых траекторий этой системы с постоянными параметрами. Метод используется не только для релейных систем, но и для других нелинейных систем, траектории которых можно разбить на участки с постоянными параметрами.

Метод заключается в выполнении следующих действий:

1) представление нелинейной системы в виде набора линейных моделей, соответствующих линейным участкам нелинейных звеньев;

2) разбиение пространства (плоскости) на области, в которых система описывается линейными уравнениями;

3) получение набора участков фазовых траекторий линейных систем и их объединение в единую траекторию нелинейной системы («припасовывание»).

Рассмотрим этот метод на примере релейной системы.

Пример 4.1: Составим релейную систему управления объектом в виде двух последовательно включенных интеграторов. Требуется так изменять управление, чтобы выходная переменная объекта x_1 приходила в ноль из любой начальной точки (любой точки фазовой плоскости), то есть задание в системе – ноль, но начальное положение ненулевое. Уравнения объекта имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u \end{aligned} \quad . \tag{4.1}$$

его структура показана на рисунке 4.1.

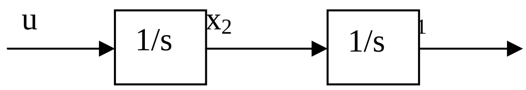

Рисунок 4.1– Структура объекта управления в виде двух интеграторов

Составим релейную систему управления. Для этого на вход объекта включим релейный элемент (релейное звено) и организуем обратную связь обычным образом. В итоге получим систему, представленную на рисунке 4.2.

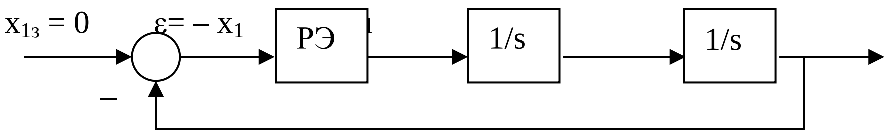

Рисунок 4.2– Структура релейной системы управления двумя интеграторами

Выполним анализ работы релейной системы на рисунке 4.2 методом фазовой плоскости. Для этого составим ее математическое описание. Чтобы получить такое описание, нужно уравнения (4.1) дополнить уравнениями релейного элемента и затем учесть сигнал обратной связи. Напомним, что характеристика этого элемента имеет вид, показанный на рисунке 4.3.

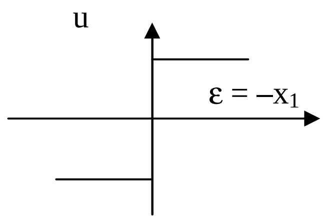

Рисунок 4.3– Характеристика релейного элемента

Примем амплитуду управляющего воздействия на выходе релейного элемента по модулю равной единице, то есть $|u| = 1$. Рассмотрение рисунка 4.3 показывает, что работа этого элемента описывается выражением

$$u = \begin{cases} -1, \text{ если } \varepsilon \le 0 \\ 1, \text{ если } \varepsilon > 0 \end{cases} \quad . \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что *u*, как функция *ε* равна знаку этого *ε*. Функция (4.2) распространена в теории управления и имеет специальное название "сигнум-функция" от латинского signum – знак. Она обозначается *Sign*, иногда *Sgn*. Тогда (4.2) можно записать в виде

$$u = Sign\,\varepsilon$$

или, что то же самое, при нулевом задании,

$$u = \begin{cases} 1, \text{ если } x_1 \le 0 \\ -1, \text{если } x_1 > 0 \end{cases}, \qquad \text{или} \quad u = -Sign\, x_1 \tag{4.3}$$

Выясним, как работает система на рисунке 4.2, какое качество отработки нулевого задания она обеспечивает? То есть выполним анализ этой системы. Используем метод припасовывания. Следуем рассмотренным ранее пунктам, или этапам.

1) *Представление нелинейной системы в виде набора линейных моделей, соответствующих линейным участкам нелинейных звеньев*. Из рассмотрения рисунка 4.2 видно, что управление *u* в системе может принимать только два фиксированных значения: +1 и –1. Найдем фазовые траектории системы (4.1) при условии, что *u* – постоянная величина. В п. 2.4 мы выяснили, что для этого можно использовать два подхода. Рассмотрим эти подходы.

Согласно первому подходу для нахождения фазовых траекторий нужно решить систему (4.1). Решение здесь облегчается тем, что *u* – постоянная величина. Начинаем со второго уравнения (4.1). Это уравнение с разделяющимися переменными. Умножая правую и левую части второго уравнения на dt и интегрируя, получаем

$$\int_{x_{20}}^{x_2} dx_2 = \int_0^t u dt = u\int_0^t dt\,.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_2 = x_{20} + ut \quad , \tag{4.4}$$

где x_{20} – начальное значение фазовой переменной x_2. Подставляя (4.4) в первое уравнение (4.1), умножая обе его части на dt и интегрируя

$$\int_{x_{10}}^{x_1} dx_1 = \int_0^t (x_{20} + ut)dt,$$

получаем решение (здесь тоже переменные разделяются) в виде

$$x_1 = x_{10} + x_{20}t + \frac{u}{2}t^2, \tag{4.5}$$

где x_{10} – начальное значение фазовой переменной x_1. Теперь мы получили фазовые траектории в виде уравнений (4.4), (4.5) в параметрической форме, где параметром является *t*. Исключим из указанных уравнений этот параметр, для чего из (4.4) находим *t*

$$t = \frac{x_2 - x_{20}}{u} \quad . \tag{4.6}$$

и подставляем его в (4.5), в итоге получаем

$$x_1 = x_{10} + \frac{x_{20}}{u}(x_2 - x_{20}) + \frac{1}{2u}(x_2 - x_{20})^2 \quad . \tag{4.7}$$

Функция в виде (4.7) и есть искомое выражение фазовых траекторий. Следует обратить внимание на то, что в (4.7) входят координаты начальной точки $[x_{10},\ x_{20}]$ и амплитуда *u*. Естественно, *u* должна быть постоянной.

Теперь найдем выражение фазовых траекторий вторым методом. Делим второе из уравнений (4.1) на первое

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u}{x_2} \quad . \tag{4.8}$$

Это также уравнение с разделяющимися переменными. Из (4.8) получаем

$$x_2 dx_2 = u dx_1 \quad . \tag{4.9}$$

Интегрируя обе части (4.9) в переделах от начального до текущего значения, имеем

$$x_1 = x_{10} + \frac{1}{2u}(x_2^2 - x_{20}^2) \quad . \tag{4.10}$$

Вроде бы получились разные решения одной и той же задачи, но если раскрыть скобки в (4.7) и выполнить простые преобразования, то получим (4.10), то есть решения одинаковые.

Из (4.7) видно, что при изменении x_{10} фазовая траектория в виде параболы без изменения своей формы смещается по оси x_1. Фазовые траектории системы (4.1) при *u* = +1, –1 показаны на рисунке 4.4. Это параболы, направленные своей вершиной в зависимости от знака *u* влево или вправо.

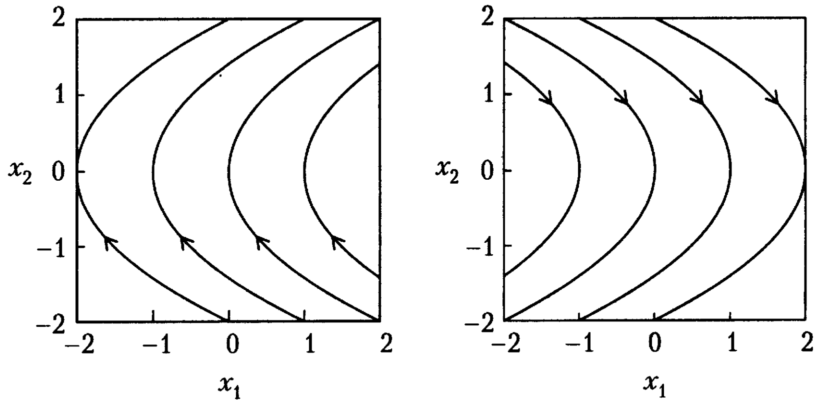

Рисунок 4.4 – Фазовые траектории системы (4.1) слева при *u* = +1, справа при *u* = –1

Теперь нужно выяснить, как идет переключение между этими параболами.

2) *Разбиение фазовой плоскости на области, в которых система описывается линейными уравнениями*. Как условие (4.3) отображается на фазовой плоскости? Из (4.3) можно заключить, что если изображающая точка находится в левой полуплоскости, то управление равно +1, если в правой – то оно равно –1. Переключение происходит при переходе точки через границу указанных полуплоскостей. Эта граница является линией, совпадающей с осью x_2, Как записать уравнение этой линии?

Вспомним, что общее уравнение прямой линии на плоскости имеет вид

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad . \tag{4.11}$$

Можно выяснить, что уравнение вертикальной линии, проходящей через начало координат, получается из (4.5) при c = b = 0. Тогда уравнение нашей линии

$$x_1 = 0. \qquad (4.12)$$

Действительно, на границе полуплоскостей выполняется именно это условие. Условие не зависит от x_2 и x_2 может быть любым. Линия (4.12) называется линией переключения.

Таким образом, линия на фазовой плоскости, на которой происходит изменение управляющего воздействия релейной системы, называется линией переключения.

Линия переключения является границей областей постоянных значений управляющего воздействия. Как мы выяснили, у нас две такие области.

Эти области можно определить следующими выражениями

$$R^+:\ x_1 \geq 0 . \qquad (4.13)$$

$$R^-:\ x_1 < 0. \qquad (4.14)$$

Здесь R^- – область точек на левой полуплоскости, где $x_1 < 0$, соответственно R^+ – область точек на правой полуплоскости, где $x_1 > 0$.

3) *Получение участков фазовых траекторий и их объединение в единую траекторию нелинейной системы*. Берем произвольную начальную точку, например, в первом квадранте (в первой четверти). Здесь управление отрицательное, поэтому парабола фазовой траектории будет двигаться вниз. При достижении фазовой траектории оси ординат ниже оси абсцисс знак управления изменится и траектория пойдет вверх опять до пересечения с осью ординат теперь уже выше оси абсцисс. Здесь управление вновь переключится, и новая парабола пройдет через начальную точку. Таким образом, цикл замыкается и при дальнейшем движении все повторится. В итоге мы получим замкнутый цикл, проходящий через начальную точку (рисунок 4.5). Система будет колебаться по замкнутой траектории, состоящей из участков парабол, направленных друг к другу, то есть в системе будут незатухающие колебания.

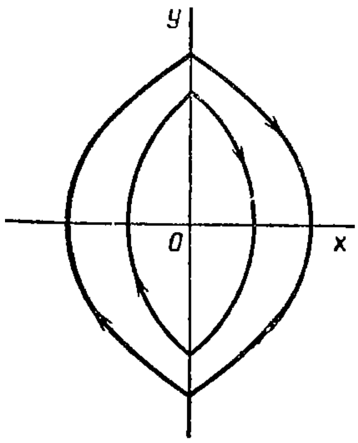

Рисунок 4.5 – Фазовый портрет системы с линией переключения (4.12). Здесь x соответствует x_1, y соответствует x_2

Теперь изменим начальную точку. Идя аналогичным путем, получаем новую замкнутую траекторию. Таким образом, для нашей системы фазовый портрет представляет собой ряд замкнутых траекторий, вложенных друг в друга. Таких траекторий может быть бесконечно много, ими может быть заполнена вся фазовая плоскость. Такая картина в полной мере представляет характер движения системы. В нашей системе такой вид фазового портрета объясняется тем, что мы имеем астатический объект второго порядка, он не имеет самовыравнивания. Но это не случай автоколебаний, так как здесь амплитуда зависит от начальной точки.

Возникает вопрос: хорошее ли качество регулирования в этой системе? Ясно, что оно плохое. Система "качается" с амплитудой, зависящей от начальной точки, и эта амплитуда может быть произвольно большой, а нам нужно, чтобы в результате управления x_1 при любой начальной точке приходило в начало координат. Можно ли улучшить ситуацию и как?

Выясним, почему возникают автоколебания. Рассмотрение фазовых траекторий (рисунок 4.5) показывает, что при движении системы к нулевому значению x_1 (цель регулирования) x_2 увеличивается, то есть увеличивается скорость. При $x_1 = 0$ скорость наибольшая и система "проскакивает" эту нужную точку. Она потом возвращается назад, но опять проходит нулевую точку на большой скорости.

Это рассуждение наводит на мысль, что нужно как-то "упреждать" движение. Не разгонять бездумно систему, а переключать ее на торможение заранее, до достижения нулевой точки. То есть нужно, чтобы изображающая точка встречала раньше свою линию переключения, а это значит, что линия переключения должна быть наклонной, и она должна проходить во второй и четвертой четверти фазовой плоскости через начало координат. Тогда, если принять, что новая линия переключения прямая, то уравнение этой прямой, проходящей через начало координат через вторую и четвертую четверть, будет иметь вид

$$x_1 + kx_2 = 0 \text{, или } x_1 = -kx_2 , \tag{4.15}$$

где k – положительное число. Линия переключения (4.15) разделяет области положительных и отрицательных значений управляющего воздействия, но в отличие от (4.13), (4.14) эти области уже имеют вид:

$$\text{R}^{+}\text{:} \;\; x_1 + kx_2 \geq 0 . \tag{4.16}$$

$$\text{R}^{-}\text{:} \;\; x_1 + kx_2 < 0. \tag{4.17}$$

Построив эту линию и фазовый портрет, убеждаемся, что, действительно, теперь фазовые траектории после ряда колебаний приходят в ноль (рисунок 4.6).

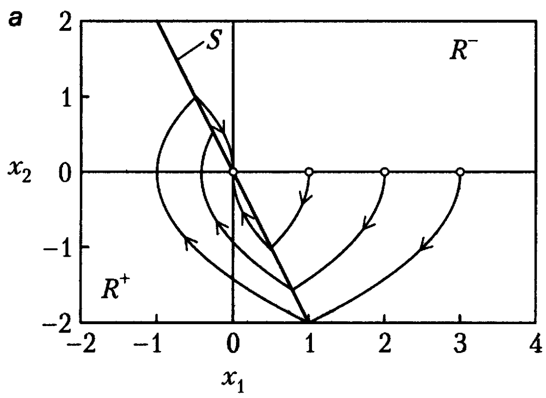

Рисунок 4.6 – Фазовый портрет системы с линией переключения (4.15)

Как сформировать линию переключения (4.15) в регуляторе системы? Нужно в качестве обратной связи подавать не x_1, как это было на рисунке 4.2, а сформировать $x_1 + kx_2$. Поскольку переменная x_2 является производной от x_1, то назовем новую систему с линией переключения (4.15) системой с коррекцией по производной. В итоге в системе появляется местная обратная связь по производной. Новая система имеет вид на рисунке 4.7.

Заметим, что k в (4.15) и на рисунке 4.7 является настроечным параметром нашего релейного регулятора. Возникает вопрос, каким принять k, то есть наклон линии переключения? Из рассмотрения рисунка видно, что этот наклон влияет на характер переходного процесса. Можно установить, что, чем больше k, тем за меньшее количество колебания мы прейдем к нулю. Но при превышении некоторого порогового значения k характер переходных процессов изменяется, возникает так называемый скользящий режим, о котором мы будем говорить ниже. Рациональное значение k можно найти опытным путем при моделировании или наладке системы.

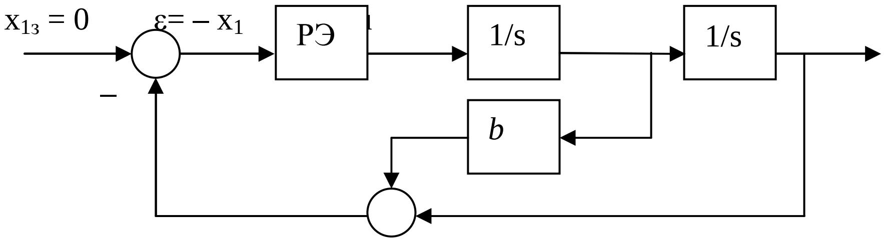

Рисунок 4.7 – Структура релейной системы управления двумя интеграторами с коррекцией по производной

У нас система приходит в ноль после ряда колебаний, то есть после ряда изменений знака управляющего воздействия. Это замедляет процесс движения. Спрашивается, нельзя ли так организовать местную обратную связь, чтобы ускорить движение системы к нулю? Оказывается, можно. Самый хороший вариант в данном примере – использовать в качестве линии переключения участки параболы, по которым система приходит в начало координат. Тогда несложно убедиться, что движение из любой точки фазовой плоскости будет состоять из двух переключений релейного элемента и система максимально быстро прейдет в начало координат. Такая система называется «оптимальная по быстродействию». В общем случае формирование линии переключения оптимальных по быстродействию систем – сложная задача, решением таких задач занимается теория оптимального управления.

Конец примера 4.1.

Продолжим рассмотрение релейных систем. Если мы используем релейный элемент с гистерезисом, то согласно рисунку 3.10 из лекции 5 моменты перехода управления от –1 к +1 разнесены по оси x_1 относительно моментов перехода от +1 к –1 на величину половины зоны гистерезиса δ. Тогда мы будем иметь две линии переключения, причем одна "работает", когда мы подходим к ней справа, то есть если в предшествующий переключению момент $u = -1$. Другая – если в предшествующий переключению момент $u = +1$. Движение справа налево означает положительное значение производной от x_1, обратное движение – отрицательную производную. Следовательно, можно записать для линий переключения

$$x_1 + bx_2 + \frac{\delta}{2} = 0 \quad \text{при } dx_1/dt > 0; \tag{4.18}$$

$$x_1 + bx_2 - \frac{\delta}{2} = 0 \text{ при } dx_1/dt < 0\,. \tag{4.19}$$

Характерный фазовый портрет для объекта с самовыравниванием представлен на рисунке 4.8.

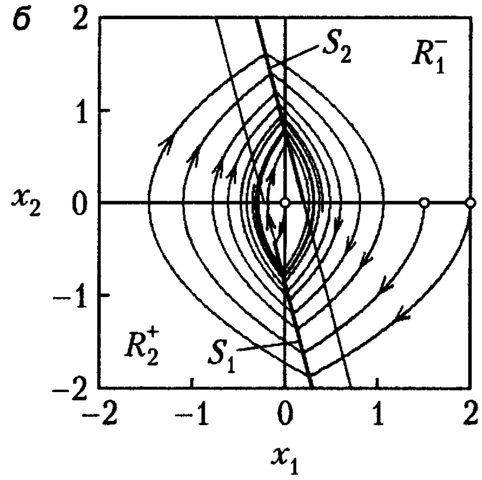

Рисунок 4.8 – Фазовый портрет системы с релейным элементом с гистерезисом

4.2 Скользящие режимы

Можно выяснить, что иногда фазовая траектория, достигая линии переключения, не идет за эту линию, а двигается по линии. В примере 4.1 это происходит, если k превышает некоторое пороговое значение. Если рассмотреть временную диаграмму, то мы увидим, что процесс движения сопровождается частыми (теоретически с бесконечно большой частотой) переключениями релейного элемента. Изображающая точка как бы скользит по линии переключения. Такой процесс так и называется "скользящий режим".

Итак: *Скользящий режим – это процесс движения системы по линии переключения, сопровождающийся частыми переключениями релейного элемента.*

Почему возникает скользящий режим, хорошо это или плохо? Рассмотрим это более подробно. Изобразим участок фазового портрета релейной системы с достаточно сильной местной обратной связью (Рисунок 4.9)

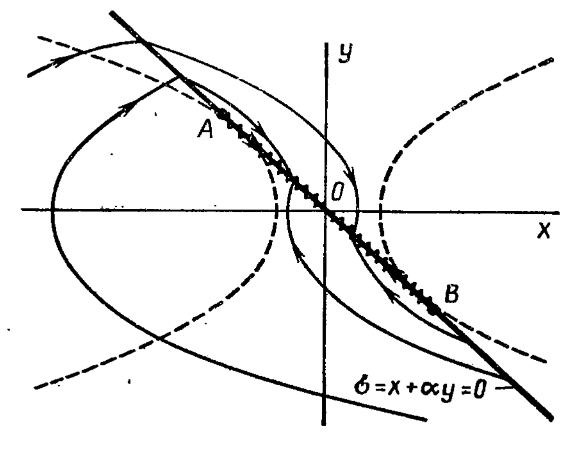

Рисунок 4.9 – Скользящий режим в релейной системе

Пусть по фазовой траектории мы двигаемся к линии переключения. Как только траектория пересечет линию переключения, релейный элемент переключится и траектория изменит свое направление. Но из-за сильной обратной связи мы опять оказываемся ниже линии переключения, и изображающая точка снова двигается к этой линии. Ситуация повторяется многократно. В итоге имеем скользящий режим. Теоретически частота переключения релейного элемента бесконечно большая, а амплитуда отклонения от линии переключения стремится к нулю. Однако в реальной системе частота переключения всегда ограничена.

Изображающая точка действительно скользит по линии переключения к равновесному состоянию. Но скорость движения значительно меньше, ведь релейный элемент не все время включен.

Рассмотрение процесса управления показывает, что фазовая траектория вновь возвращается на линию переключения, если касательная к этой траектории после переключения будет круче наклонена, чем линия переключения.

Таким образом, *условием возникновения скользящего режима является превышение угла наклона касательной к фазовой траектории после переключения угла наклона линия переключения*.

Нетрудно видеть, что в скользящем режиме изменение параметров объекта управления не изменяет фазовой траектории, все равно она двигается по линии переключения, лишь бы было выполнено условие возникновения этого режима. Таким образом, мы имеем систему, обладающую полезным свойством нечувствительности к параметрам объекта управления. Такую систему называют приспосабливающейся, или адаптивной системой.

Итак: в режиме скольжения фазовая траектория не зависит от параметров объекта управления.

Скользящий режим благодаря своему свойству адаптивности достаточно часто используется на практике. Но при этом следует избегать частых переключений мощной силовой части, так как это связано со снижением ее надежности и повышенным расходом энергии. При применениях выход релейного элемента и силовую часть разделяют фильтром низких частот.